

Zkouškový test PST, 24.5.2021

T1 Úroveň vodní hladiny X v decimetrech nad přípustnou mezí má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podmíněná pravděpodobnost, že alarm spustí poplach, je $P(A|X \leq 1) = 0.1$, $P(A|X \in (1, 4]) = 0.5$, $P(A|X > 4) = 0.9$, kde A je jev, že se spustí alarm.

- Jaká je pravděpodobnost, že se spustí alarm?
- Spustil se alarm. Jaká je pravděpodobnost, že hladina je alespoň o 5dm nad přípustnou mezí? Předpokládáme $P(A|X > 4) = P(A|X > 5)$.

T2 O jevech A_1, A_2 víme: $P(A_1 \cup A_2) = 1$, $P(A_1) + P(A_2) = 1$, $P(A_i) > 0$, $i \in \{1, 2\}$. Dokažte či vyvráťte následující výroky:

- Pravděpodobnost, že jevy A_1, A_2 nastanou zároveň, je nulová.
- Jevy A_1, A_2 jsou nezávislé.
- Jevy $A_1, A_1 \cup A_2$ jsou nezávislé.

T3 Náhodně vybíráme body z intervalu $[-1, 1]$. Kolik nejméně bodů musíme vybrat, aby pravděpodobnost, že jejich aritmetický průměr bude v intervalu $[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$, byla alespoň 99%? Uveďte, jaké používáte předpoklady.

T4 Veličina X má rozdělení, o němž víme, že

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\log(a)} - \frac{1}{\log(b)}$$

pro každé dva body $a, b > e$, pro které $a < b$. Symbol \log značí přirozený logaritmus, tj. se základem e .

- Nalezněte distribuční funkci veličiny X . Je X spojitá, je X diskrétní? Obě odpovědi zdůvodněte.
- Nalezněte střední hodnotu veličiny $Y = \log X$.
- Co lze říci o střední hodnotě veličiny X ? Zdůvodněte, co tvrdíte.

T5 O jistém podniku se traduje, že točí pivo pod míru (tj. $< 0.5l$). Vydali jsme se proto přesvědčit sami. Všechny natočené kousky jsme řádně přeměřili a zjistili jsme objemy v litrech: 0.505, 0.485, 0.490, 0.499, 0.494, 0.495, 0.488. Lze prokazatelně říci, že v podniku točí podmíru? Prokazatelně chápeme jako test na hladině $\alpha = 0.05$. Uveďte předpoklady pro svůj test.